

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**И.С. Ильин, Г.С. Заславский, С.М. Лавренов,  
В.В. Сазонов, В.А. Степаньянц, А.Г. Тучин, Д.А. Тучин,  
В.С. Ярошевский**

**Баллистическое проектирование  
траекторий перелёта  
с орбиты искусственного спутника Земли  
на гало-орбиту в окрестности точки  $L_2$   
системы Солнце-Земля**

Москва — 2013

## АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрено баллистическое проектирование перелета КА в окрестность точки  $L_2$  и последующий выход КА на гало-орбиту. Изложен метод расчета траекторий одноимпульсных перелетов Земля – гало-орбита с использованием и без использования лунного гравитационного маневра.

При расчёте одноимпульсных траекторий перелётов Земля – гало-орбита (с использованием и без использования лунного гравитационного маневра) применяется алгоритм построения начальных приближений. Указанные приближения строятся путем расчета и анализа изолиний функции от двух переменных. В качестве такой функции рассматривается высота перицентра отлетной орбиты над поверхностью Земли. Аргументами функции являются специальные параметры, характеризующие гало-орбиту.

Указанный алгоритм позволяет получить гало-орбиты с заданными геометрическими характеристиками как в плоскости эклиптики, так и в плоскости, ей ортогональной. Получены оценки затрат характеристической скорости на поддержание КА на выбранной гало-орбите. Описанная методика была использована для поиска рабочих орбит КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон».

**Ключевые слова:** гало-орбиты, точка  $L_2$ , метод изолиний, Спектр-РГ, Миллиметрон.

## ABSTRACT

This work covers ballistic design of the spacecraft transfer to the vicinity of the Sun-Earth system  $L_2$  point and halo orbit motion in this area. The following methods and calculation algorithms are described:

the algorithm building one impulse transfer trajectories starting at the LEO and ending at the halo orbit implying a swing by maneuver or not.

the algorithm calculating the stationkeeping impulses, needed for the transfer to the halo orbit and the for the long term halo orbit motion.

For calculation of one impulse flights from the Earth to the halo orbit (with the help of a swing by maneuver or without it) the initial approximation construction algorithm has been implemented. These approximations are calculated by means of two variables' function isolines construction and analysis. The transfer trajectory pericentre height above the Earth surface is considered to be such a function. The arguments of this function are the special parameters describing the halo orbit.

The described algorithm provides halo orbits with the given geometrical dimensions in the ecliptics plane and in plane orthogonal to it. The characteristic velocity costs needed for the stationkeeping have been evaluated. These methods were used for construction of the nominal orbits for the “Spectr-RG” and “Millimetron” spacecrafts.

**Key words:** halo orbits,  $L_2$  point, isoline method, Spectr-RG, Millimetron.

Данный препринт – продолжение работы [1,2]. В нём описан алгоритм построения траекторий перелёта космического аппарата с низкой околокруговой орбиты на гало-орбиту с заданными параметрами около точки  $L_2$  системы Солнце-Земля. Рассмотрены прямые перелёты и перелёты с использованием гравитационного манёвра у Луны. Данная задача актуальна в связи с проектами российских КА научного назначения «Спектр-РГ» и «Миллиметрон», в качестве рабочей орбиты которых планируется использовать подобные гало-орбиты. В настоящее время такие гало-орбиты уже нашли применение для научных космических аппаратов.

Гало-орбита около точки  $L_2$  системы Солнце – Земля удобна тем, что выведение на неё обеспечивается одноимпульсным перелётом: импульс торможения не нужен. Для поддержания орбиты нужно проведение коррекций. Коррекции должны проводиться раз в 70 – 90 суток. Суммарные затраты на коррекции поддержания орбиты в течение 7 лет не должны превосходить 200 м/с.

Гало-орбита задаётся четырьмя параметрами:  $A$  – удаление КА от точки  $L_2$  в плоскости эклиптики,  $B$  – удаление КА от точки  $L_2$  в плоскости, ортогональной эклиптике,  $\varphi_1$  – фаза колебательного движения КА в проекции на плоскость эклиптики,  $\varphi_2$  – фаза колебательного движения КА в проекции на плоскость, ортогональную эклиптике.

Пример траектории перелёта и полёта по гало-орбите показан на рис. 1. На этом рисунке показана проекция траектории на плоскость  $OXY$  вращающейся СК с началом в точке  $L_2$ . Ось  $OX$  направлена от точки  $L_2$  к Земле. Ось  $OZ$  ортогональна плоскости эклиптики. Ось  $OY$  дополняет систему до правой. Цифры, указанные вдоль кривой, означают сутки полёта. Примерно через 20 суток полёта КА выходит из сферы действия Земли, а через 100 суток полёта КА начинает полёт по гало-орбите. Траектория полёта по гало-орбите показана с учётом выполнения коррекций удержания на ней. При полёте по гало-орбите КА облетает точку  $L_2$  за 180 суток.

Препринт состоит из шести разделов. В первом разделе описан метод построения начального приближения для перелёта с низкой орбиты ИСЗ на заданную гало-орбиту в окрестности точки  $L_2$  системы Солнце-Земля без импульса торможения. Описан и развит метод, предложенный М.Л. Лидовым, построения изолиний функции высоты перицентра от параметров гало-орбиты, позволяющий найти траектории перелёта с орбиты ИСЗ на гало-орбиту, которые не требуют импульса торможения в окрестности точки  $L_2$ .

Во втором разделе описан метод построения начального приближения для траектории одноимпульсного перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки  $L_2$  с использованием гравитационного манёвра у Луны. Метод применим как в случае, когда КА после перехода на

перелётную траекторию сразу направляется к Луне, так и в случае, когда КА перед перелётом к Луне совершает виток вокруг Земли по сильно вытянутой орбите.

В третьем разделе описан алгоритм расчёта номинальных траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту вокруг точки  $L_2$  без использования и с использованием гравитационного манёвра у Луны. Примеры расчёта номинальных траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки  $L_2$  приведены в разделах 4, 5 и 6. В разделе 4 приведены результаты расчёта гало-орбит и одноимпульсных траекторий перелёта на них для проекта «Спектр-РГ». Раздел 5 содержит пример расчёта гало-орбиты и траектории перелёта на неё для проекта «Миллиметрон». В разделе 6 приведён пример расчёта траектории перелёта на гало-орбиту с использованием гравитационного манёвра у Луны.

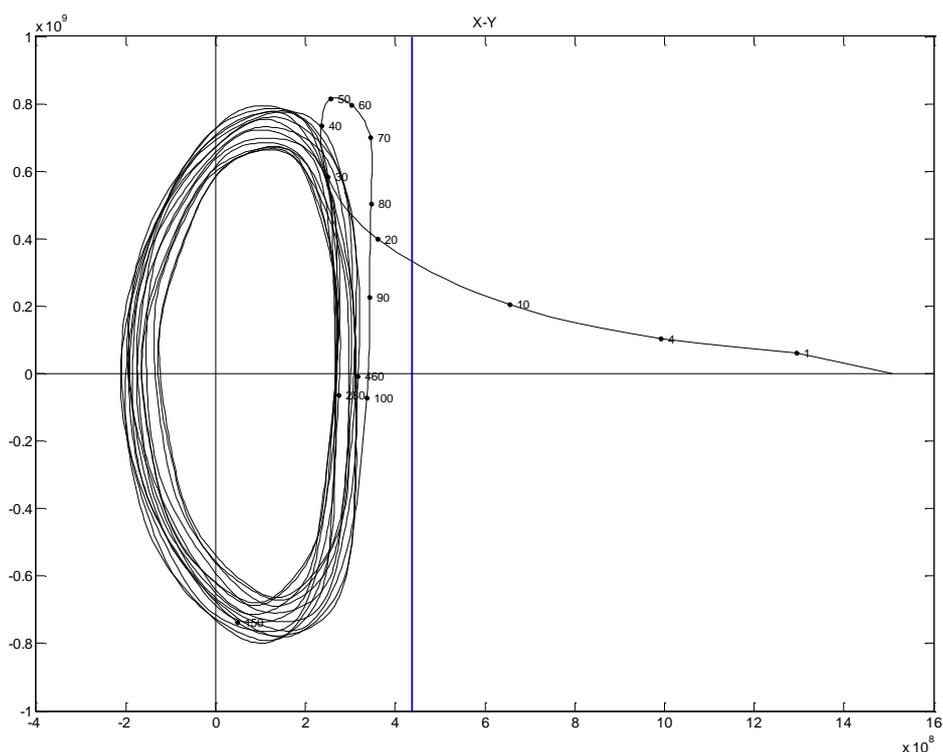


Рис. 1. Перелёт без использования гравитационного манёвра у Луны: траектория перелета и проекция гало-орбиты вокруг точки  $L_2$  на плоскость  $OXY$  вращающейся СК.

## 1. Начальное приближение для траектории прямого одноимпульсного перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки $L_2$ .

Метод построения начального приближения для траекторий перелета с низкой орбиты ИСЗ на заданную гало-орбиту в окрестности точки  $L_2$  без импульса торможения основан на следующем свойстве орбит в окрестности точки  $L_2$ . Существует семейство орбит (орбиты перелёта), которые с одной стороны достаточно близко подходят к Земле (в начальный момент времени), а с другой стороны, некоторое время являются гало-орбитами (спустя 100 суток после отлёта от Земли). При этом, при переходе к реальной модели оценка затрат характеристической скорости на переход с орбиты перелёта на гало-орбиту примерно равна затратам характеристической скорости на одну коррекцию поддержания гало-орбиты.

В работе [3] был предложен метод изолиний функции высоты перицентра от параметров гало-орбиты для приближенного описания прямых одноимпульсных перелётов (без гравитационного манёвра у Луны) с околокруговой орбиты ИСЗ на заданную гало-орбиту. Движение КА рассматривается во вращающихся системах координат: в системе  $Ox_1x_2x_3$  с началом в центре Земли  $O$  и в системе  $O'\xi_1\xi_2\xi_3$  с началом  $O'$  в точке либрации  $L_2$  (рис. 2). При этом:  $x_1 = \xi_1 - |OO'|$ ,  $x_2 = \xi_2$ ,  $x_3 = \xi_3$ .

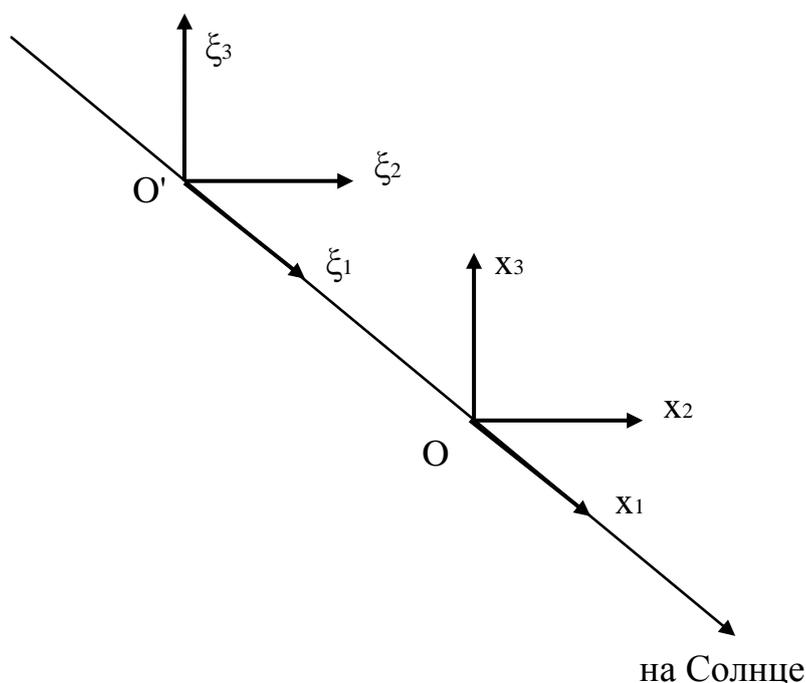


Рис. 2. Системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $O'\xi_1\xi_2\xi_3$

Зависимость координат  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  от времени определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t}, \\
\xi_2 &= -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t}), \\
\xi_3 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2),
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\omega_1 = n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{9B_L^2 - 8B_L} - B_L + 2 \right)} \approx 0.035384 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}},$$

$$\omega_2 = n_1 \cdot \sqrt{B_L} \approx 0.034148 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}},$$

$$\lambda = n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{9B_L^2 - 8B_L} + B_L - 2 \right)} \approx 0.042734 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}},$$

$$k_1 = \frac{1}{2(\lambda/n_1)} \left[ \left( \frac{\lambda}{n_1} \right)^2 - 2B_L - 1 \right] \approx -0.54525,$$

$$k_2 = \frac{1}{2(\omega_1/n_1)} \left[ \left( \frac{\omega_1}{n_1} \right)^2 + 2B_L + 1 \right] \approx 3.1873,$$

$$\mu' = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu},$$

$$B_L = \left( \frac{1 - \mu'}{r_{L1}^3} + \frac{\mu'}{r_L^3} \right) a_1^3,$$

- $\mu_1, \mu$  – массы Солнца и Земли,  
 $a_1$  – астрономическая единица,  
 $r_{L1}, r_L$  – расстояния от точки  $L_2$  до Солнца и Земли,  
 $n_1$  – средняя угловая скорость орбитального движения Земли,  
 $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$  – постоянные интегрирования.

Формулы (1) представляют собой общее решение линеаризованных уравнений, описывающих малые колебания КА в окрестности точки  $L_2$  [4]. В работах [1,2] также используется указанное решение. Однако в этих работах используются другие постоянные интегрирования:  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  и  $c_6$ , которые связаны с постоянными интегрирования  $A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$  следующими соотношениями:

$$A = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, \quad B = \sqrt{c_5^2 + c_6^2}, \quad C = c_1, \quad D = c_2,$$

$$\cos(\phi_1) = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, \quad \sin(\phi_1) = -\frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}},$$

$$\cos(\phi_2) = \frac{c_5}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}, \quad \sin(\phi_2) = -\frac{c_6}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}.$$

Определим  $x_1^* = -\theta \cdot r_L$ . Выбором  $\theta$  в интервале  $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right]$  можно удовлетворить следующим условиям. Если траектория начинается в окрестности Земли и является асимптотической к условно-периодической орбите, расположенной в достаточно малой окрестности  $L_2$ , то такая траектория обязательно пересечёт плоскость  $x_1 = x_1^*$ . При этом в главном приближении характеристики траектории для  $|x_1| < |x_1^*|$  должны удовлетворительно описываться решениями задачи двух тел, а при  $|x_1| > |x_1^*|$  линейным приближением (рис 3).

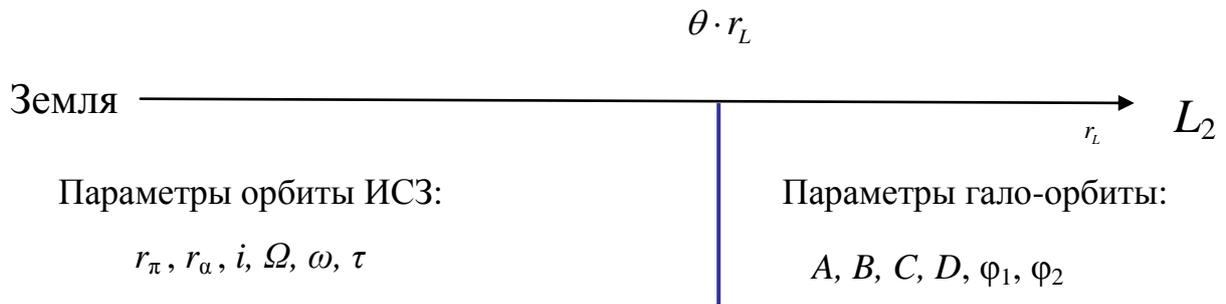


Рис. 3. Переход от параметров геоцентрической орбиты перелетной траектории к параметрам гало-орбиты.

Асимптотичность траектории (асимптотическое приближение к условно-периодической орбите) в рамках такого приближения определяется условием  $C=0$ . За счёт выбора  $D$  обеспечивается сопряжение гало-орбиты с орбитой ИСЗ.

Пусть начало отсчёта выбрано так, что при  $t = t_0$  выполняется равенство:  $x_1 = x_1^*$ . Тогда из первого уравнения (1) находим

$$D = x_1^* + r_L - A \cos \phi_1 \quad (2)$$

Тем самым при  $t=0$  координаты  $x_1, x_2, x_3$  и скорости  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}$  оказываются однозначными функциями четырех параметров:  $A, B, \phi_1, \phi_2$ . Переходя к невращающейся СК, определим зависимости элементов орбиты  $v_\pi, \omega, \Omega, i, r_\pi, \tau$  от этих параметров. Естественно выделить траектории одноимпульсного перелёта условием на расстояние перицентра

$$r_{\pi} = R_3 + h = r_{\pi}^*,$$

где

$R_3$  – радиус Земли,

$h$  – заданная высота промежуточной орбиты ИСЗ.

Тем самым множество орбит перелёта определяется указанными зависимостями  $v_{\pi}, \omega, \Omega, i, r_{\pi}$  и  $\tau$  от  $A, B, \varphi_1$  и  $\varphi_2$  при условии, что расстояние перицентра  $r_{\pi}$  равно заданной величине. При фиксированных  $A$  и  $B$  в плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$  строится изолиния:

$$r_{\pi}(\varphi_1, \varphi_2) = r_{\pi}^*.$$

Рассмотрим алгоритм вычисления  $r_{\pi}$  по заданным фазам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Сначала вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени  $t$  в зависимости от параметров:  $A, B, \varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Пусть справедливы следующие обозначения:

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$  – вектор состояния КА в момент времени  $t=0$  во вращающейся СК с центром в  $L_2$ ,

$x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$  – координаты и компоненты скорости КА в момент времени  $t=0$  в невращающейся геоцентрической эклиптической СК  $Ox_1x_2x_3$ , ось  $Ox_1$  которой направлена на Солнце в момент времени  $t_0$ ,

$x_1^* = -\theta \cdot r_L$  – параметр перехода из сферы действия Земли в окрестность  $L_2$ ,  $\theta \in \left[ \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$ .

Координаты и компоненты вектора скорости КА вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} D &= r_L + x_1^* - A \cos \varphi_1 \\ \xi_1 &= r_L + x_1^*, & \dot{\xi}_1 &= -\omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D, \\ \xi_2 &= -k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D, & \dot{\xi}_2 &= -k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D \\ \xi_3 &= B \cos \varphi_2, & \dot{\xi}_3 &= -\omega_2 B \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - r_L, & \dot{x}_1 &= \dot{\xi}_1 - n_1 x_2, \\ x_2 &= \xi_2, & \dot{x}_2 &= \dot{\xi}_2 + n_1 x_1, \\ x_3 &= \xi_3, & \dot{x}_3 &= \dot{\xi}_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее по вектору  $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  вычисляются элементы орбиты и в том числе расстояние перицентра  $r_{\pi}$ .

Рассмотрим функцию  $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$ , которая заданным значениям  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\theta_A = \frac{A}{r_L}$  и  $\theta_B = \frac{B}{r_L}$  сопоставляет расстояние перицентра  $r_\pi$  в соответствии с вышеописанным алгоритмом.

Алгоритм построения изолинии функции высоты перицентра (для некоего его фиксированного значения) от параметров гало-орбиты в фазовой плоскости  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  состоит из двух частей: поиска начальной точки изолинии и расчета изолинии по начальной точке.

Поиск начальной точки изолинии выполняется сканированием в интервалах от 0 до  $360^\circ$  по параметру  $\varphi_1$  и от  $-180^\circ$  до  $180^\circ$  по параметру  $\varphi_2$ . Экспериментально было установлено, что шаг сканирования  $h_{\varphi_2}$  по параметру  $\varphi_2$  следует выбирать не менее  $45^\circ$ , а шаг сканирования  $h_{\varphi_1}$  по параметру  $\varphi_1$  – не менее  $1^\circ$ . Сканирование выполняется так, что для каждого значения  $\varphi_2$  вычисляются значения  $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$  для значений  $\varphi_1$  из указанного выше интервала. Если выполняется условие:

$$\left(f(\varphi_1 - h_{\varphi_1}, \varphi_2, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*\right) \cdot \left(f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*\right) \leq 0, \quad (5)$$

искомое значение  $\varphi_1^*$  лежит в интервале от  $\varphi_1 - h_{\varphi_1}$  до  $\varphi_1$ . Для нахождения  $\varphi_1^*$  используется метод бисекции. Выполняется итерационная процедура. На каждом её шаге интервал поиска сокращается в два раза. Обозначим  $\varphi_b$  и  $\varphi_e$  – начало и конец интервала поиска. При выполнении условия (5) начало интервала поиска  $\varphi_b$  устанавливается равным  $\varphi_1 - h_{\varphi_1}$ , а конец —  $\varphi_1$ . На

каждом шаге вычисляется  $\varphi_m = \frac{\varphi_b + \varphi_e}{2}$  и значение функции в этой точке:

$$r_{\pi, m} = f(\varphi_m, \varphi_2, \theta_A, \theta_B). \quad (6)$$

Обозначим:

$$r_{\pi, b} = f(\varphi_b, \varphi_2, \theta_A, \theta_B). \quad (7)$$

Если  $(r_{\pi, b} - r_\pi^*) \cdot (r_{\pi, m} - r_\pi^*) \leq 0$ , искомое значение  $\varphi^*$  принадлежит интервалу  $[\varphi_b, \varphi_m]$ , иначе интервалу  $[\varphi_m, \varphi_e]$ . Таким образом, границы интервала  $\varphi_b$  и  $\varphi_e$  устанавливаются по следующему алгоритму:

$$\varphi_b^{\text{new}} = \begin{cases} \varphi_b, & \text{если } (r_{\pi, b} - r_\pi^*)(r_{\pi, m} - r_\pi^*) \leq 0, \\ \varphi_m, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\varphi_e^{\text{new}} = \begin{cases} \varphi_m, & \text{если } (r_{\pi,e} - r_{\pi}^*)(r_{\pi,m} - r_{\pi}^*) \leq 0, \\ \varphi_e, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Итерационный процесс завершается, если  $\varphi_e - \varphi_b < \varepsilon_{\varphi}$ . Экспериментально установлено, что  $\varepsilon_{\varphi}$  целесообразно положить равным  $\frac{180}{\pi}10^{-6}$ .

Рассмотрим алгоритм расчета следующей точки изолинии при известной текущей. Основной принцип алгоритма состоит в том, что если известна точка  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , принадлежащая изолинии, то ищется точка пересечения изолинии с прямой, параллельной оси  $\varphi_1$  на плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$  и проходящей через точку начала поиска  $(\varphi_1 + s, \varphi_2 + s)$ , либо точка пересечения изолинии с прямой, параллельной оси  $\varphi_2$  и также проходящей через точку начала поиска (рис. 4).

Входной информацией этого алгоритма является точка, принадлежащая изолинии  $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$  и шаг поиска  $h_{\varphi}$ . Случай поиска второй точки изолинии от случая поиска третьей и последующих точек отличается выбором параметра  $s$ .

$$s = \begin{cases} h_{\varphi}, & \text{если } i = 1; \\ h_{\varphi} \frac{h_g}{\sqrt{(\varphi_{1i} - \varphi_{1i-1})^2 + (\varphi_{2i} - \varphi_{2i-1})^2}}, & \text{если } i > 1, \end{cases}$$

где  $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$ ,  $(\varphi_{1,i-1}, \varphi_{2,i-1})$  – точки, принадлежащие изолинии, а  $h_g$  – угол величиной один градус.

С использованием параметра  $s$  и последней известной точки изолинии  $(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i})$  устанавливается точка начала поиска  $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b}) = (\varphi_1 + s, \varphi_2 + s)$  и ищется пересечение изолинии с отрезком на плоскости  $\varphi_1, \varphi_2$ , соединяющим точки  $(\varphi_{1b} - j \cdot h_{\varphi}, \varphi_{2b})$  и  $(\varphi_{1b} + j \cdot h_{\varphi}, \varphi_{2b})$  при  $j = 1, 2, \dots, N$ . Этот отрезок проходит через точку начала поиска, параллелен оси  $\varphi_1$  а длина его увеличивается с увеличением индекса  $j$ . Для этого ищется такое значение  $j = 1, 2, \dots, N$ , при котором выполняется условие:

$$(f(\varphi_{1b} - j \cdot h_{\varphi}, \varphi_{2b}, \theta_A, \theta_B) - r_{\pi}^*) \cdot (f(\varphi_{1b} + j \cdot h_{\varphi}, \varphi_{2b}, \theta_A, \theta_B) - r_{\pi}^*) \leq 0. \quad (8)$$

Если значение  $j$  найдено, происходит поиск такого значения  $\varphi_1^*$ , чтобы точка  $(\varphi_1^*, \varphi_{2b})$  принадлежала изолинии. Для этого используется описанный выше алгоритм, реализующий метод бисекции.

Если значение индекса  $j$ , при котором выполняется условие (8) не найдено, ищется точка пересечения изолинии с отрезком, который проходит через точку начала поиска и параллелен оси  $\varphi_2$ . Этот отрезок соединяет точки  $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} - j \cdot h_\varphi)$  и  $(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} + j \cdot h_\varphi)$ . При поиске пересечения ищется значение индекса  $j = 1, 2, \dots, N$ , для которого выполняется условие:

$$\left(f(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} - j \cdot h_\varphi, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*\right) \cdot \left(f(\varphi_{1b}, \varphi_{2b} + j \cdot h_\varphi, \theta_A, \theta_B) - r_\pi^*\right) \leq 0. \quad (9)$$

Если найдено значение  $j$ , при котором выполняется условие (9), происходит поиск методом бисекции значения  $\varphi_2^*$ , при котором точка  $(\varphi_{1b}, \varphi_2^*)$  принадлежит изолинии. Если значение  $j$ , при котором выполняется условие (9), не найдено, работа алгоритма завершается с отрицательным кодом ответа: точка изолинии не найдена. В результате вычислительных экспериментов установлено, что значение  $N$  целесообразно принять равным 4.

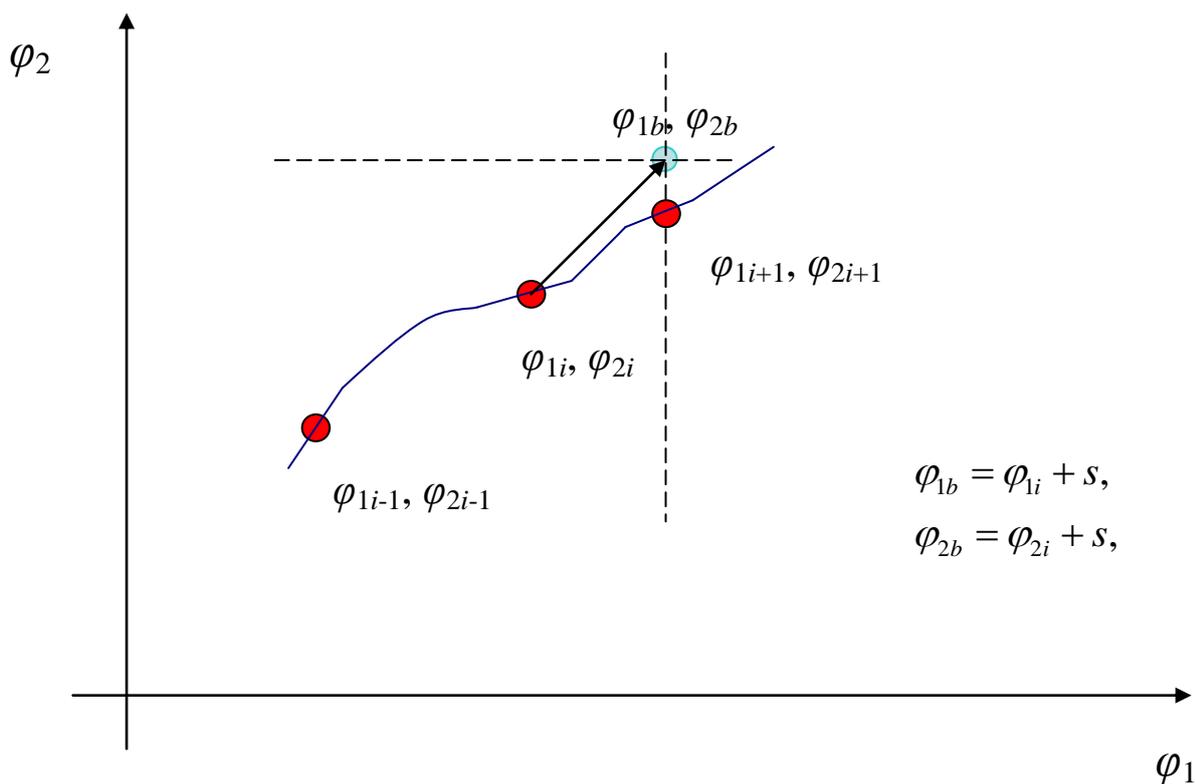


Рис. 4. Поиск точек изолинии.

Процесс построения изолинии завершается, если выполнено условие замыкания изолинии

$$\sqrt{(\varphi_{1,i} - \varphi_{1,1})^2 + (\varphi_{2,i} - \varphi_{2,1})^2} < \varepsilon_\varphi^{\text{stop}} \quad (11)$$

или получен отрицательный код ответа от алгоритма поиска следующей точки. В результате вычислительных экспериментов установлено, что значение параметра  $\varepsilon_{\varphi}^{\text{stop}}$  целесообразно положить равным  $0.5^\circ$ .

На рис. 5 показан пример расчёта изолиний функции высоты перицентра для гало-орбит, у которых  $\theta_B = 0.1$ , а  $\theta_A$  принимает следующие значения: 0.180, 0.185, 0.190, 0.195, 0.200. Каждой паре значений  $\theta_A$  и  $\theta_B$  соответствуют две замкнутых изолинии в верхней и нижней части. Меньшему значению  $\theta_A$  соответствует изолиния меньшего размера.

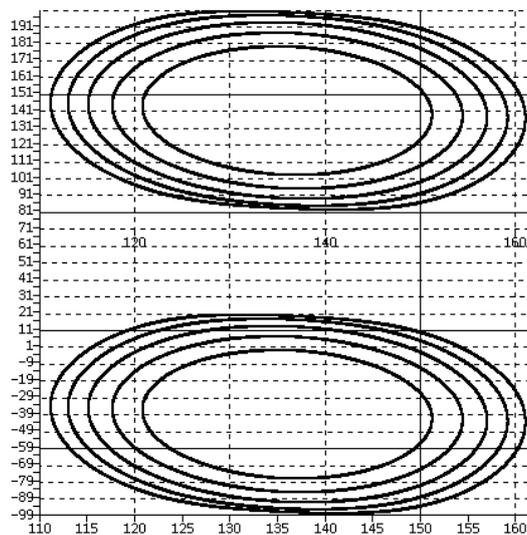


Рис. 5. Пример расчёта изолиний  $\theta_A = 0.18 - 0.20$ ,  $\theta_B = 0.1$

По построенным изолиниям для фиксированной высоты перицентра согласно функции  $f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$  и заданной дате старта КА с орбиты выведения определяются элементы отлетной геоцентрической орбиты. Каждой точке изолинии соответствует какая-либо отлетная орбита. Для экономии характеристической скорости, расходуемой на переход с орбиты выведения на орбиту перелета, из рассчитанного множества выбираются те траектории перелета, наклонение которых соответствует наклонению орбиты выведения.

В таблице 1 приведены примеры найденных начальных приближений траектории перелета на гало-орбиту с заданными параметрами  $\theta_A$  и  $\theta_B$ . Столбцы содержат дату и время старта с геоцентрической низкой околокруговой орбиты, координаты и скорости КА после приложения импульса перехода на траекторию перелета, величину импульса, время перелета в сутках от момента старта с опорной орбиты до перехода на гало-орбиту, параметр  $\theta$  перехода из геоцентрической СК в СК с центром в точке  $L_2$ , параметр гало-орбиты  $\theta_A$ , параметр  $\theta_B$  принят равным 0.1 для всех рассматриваемых вариантов.

Таблица 1. Начальные приближения траектории перелета для различных значений параметра  $\theta_A$  в рамках окна старта 30.12.2014

$t$ , ДМВ	$\theta_A$	$\varphi_1$ , град	$\varphi_2$ , град	$\Delta V$ , м/с	$i$ , град	$\omega$ , град
16:22:04	0.200	157.5857	-11.66129	3128.164	51.468	307.09
16:28:59	0.195	155.4032	-11.35459	3129.120	51.472	308.823
16:36:44	0.190	152.7965	-11.06733	3127.542	51.467	310.773
16:59:44	0.185	122.433	111.8391	3122.277	51.473	316.459
16:48:26	0.180	127.8207	109.6844	3121.603	51.464	313.632

## 2. Начальное приближение для траектории одноимпульсного перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки $L_2$ с использованием гравитационного манёвра у Луны.

Известно, что на гало-орбиты со значением параметра  $\theta_A$ , меньшим, чем 0.17 невозможно перелететь по схеме одноимпульсного перелёта, без дополнительных манёвров КА [5]. В [6, 7] для достижения гало-орбит с меньшими значениями параметра  $\theta_A$  предложено использовать гравитационный манёвр у Луны. В [6, 7] рассмотрена схема запуска, которая предполагает сближение с Луной не сразу после старта с Земли, а после предварительного полёта по сильно вытянутой орбите с перигеем около Земли и расстоянием в апогее большим радиуса лунной орбиты.

Предложенный ниже алгоритм построения начального приближения применим как в случае, когда КА после перехода на перелётную траекторию сразу направляется к Луне, так и в случае, когда КА перед перелётом к Луне совершает виток вокруг Земли по сильно вытянутой орбите. Для ускорения поиска интервалов времени, в которых возможен перелёт с гравитационным манёвром, используется условие на угол между направлениями от Земли на Солнце и Луну.

Очевидно, что для того, чтобы использовать гравитационный манёвр у Луны для перелёта на гало-орбиту Луна и Солнце должны быть расположены определённым образом. Это расположение можно описать углом между направлениями от Земли на Луну и Солнце. Условие перелёта Земля – гало-орбита с гравитационным манёвром у Луны выполняется раз в месяц. Под моментом перехода на гало-орбиту понимается момент времени, в который КА пересечёт плоскость, ортогональную направлению Земля – Солнце, и удалённую от центра Земли на расстояние  $(1-\theta)r_L$ , где  $\theta = \frac{17}{24}$ ,  $r_L$  – расстояние от Земли до точки  $L_2$ .

На рис. 6 показана зависимость от времени угла между направлениями от Земли на Луну и Солнце. Красным цветом отмечены интервалы времени, в которые возможен переход на гало-орбиту с использованием гравитационного манёвра у Луны. Из этого графика видно, что моменты перехода на перелётную к  $L_2$  траекторию (на гало-орбиту) с использованием гравитационного манёвра у Луны следует искать на интервалах времени, когда значение угла между направлениями от Земли на Луну и Солнце не превосходит  $45^\circ$ .

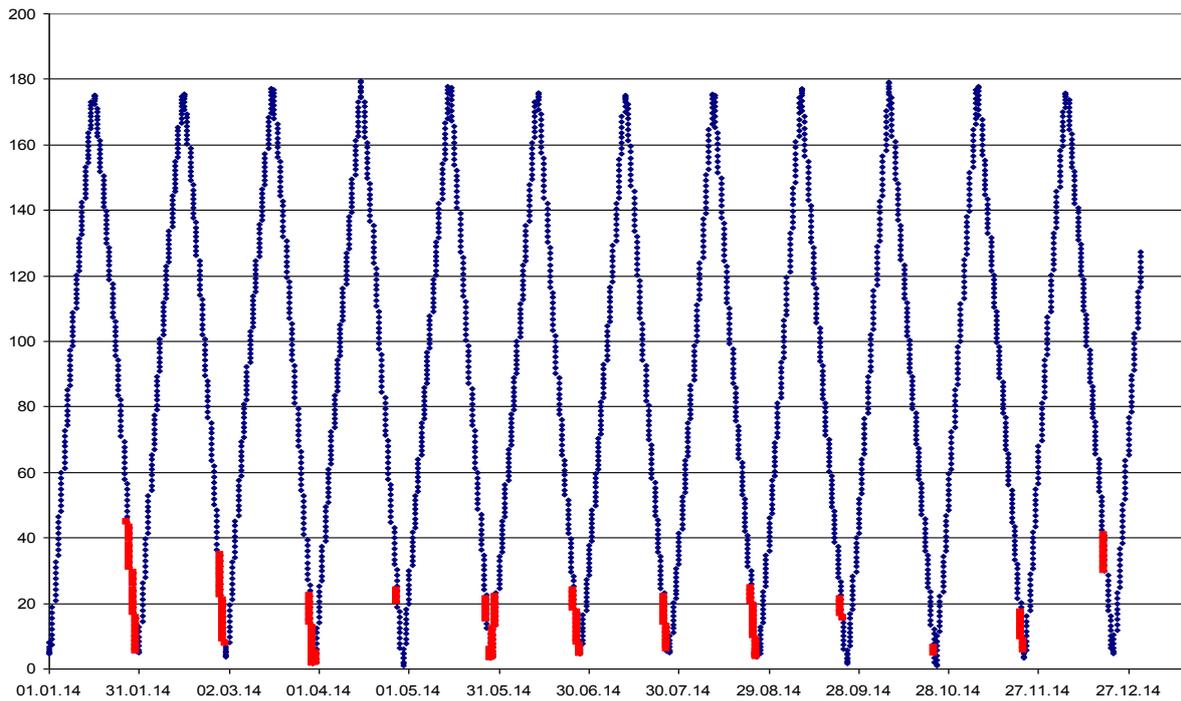


Рис. 6. Угол между направлениями от Земли на Солнце и Луну.

Рассмотрим обобщение метода построения изолиний на случай использования гравитационного манёвра у Луны. Метод может быть использован как в случае, когда КА совершает перед сближением с Луной виток вокруг Земли по сильно вытянутой орбите, так и в случае, когда КА после перехода на траекторию перелёта направляется на сближение с Луной. Начальные этапы построения изолинии функции высоты перицентра выполняются аналогично расчету в случае отсутствия гравманевра у Луны. Далее, для вычисления элементов орбиты и в том числе расстояния перицентра  $r_\pi$  по вектору  $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$  траектория перелёта разбивается на три участка:

- от Земли до входа в сферу действия Луны,
- полёт в сфере действия Луны,
- полёт после выхода из сферы действия Луны до входа в окрестность  $L_2$ .

Для определения момента выхода из сферы действия Луны следует использовать численное интегрирование. Однако если используется численное интегрирование, численный расчет вектора состояния КА целесообразно выполнять до достижения расстояния 50 тыс. км до центра Земли. Далее вычисляются оскулирующие элементы орбиты, по ним рассчитывается расстояние перицентра.

Основными параметрами, характеризующими гравитационный манёвр у Луны, являются  $\Delta_{\text{GAM}}$  – модуль импульса, сообщаемого КА в результате гравитационного манёвра, и  $P_{\text{GAM}}$  – модуль проекции импульса гравитационного манёвра на направление скорости КА. Если  $P_{\text{GAM}} > 0$ , импульс гравитационного манёвра направлен на разгон КА, иначе — на торможение.

Параметры  $\Delta_{\text{GAM}}$  и  $P_{\text{GAM}}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\Delta_{\text{GAM}} = |\mathbf{v}_{\text{out}} - \mathbf{v}_{\text{in}}|, \quad P_{\text{GAM}} = \frac{(\mathbf{v}_{\text{out}} - \mathbf{v}_{\text{in}}, \mathbf{v}_{\text{out}})}{|\mathbf{v}_{\text{out}}|},$$

где  $\mathbf{v}_{\text{in}}$  и  $\mathbf{v}_{\text{out}}$  - векторы скорости КА в моменты времени входа и выхода из сферы действия Луны соответственно. Если вход в сферу действия Луны не был найден или значение  $\Delta_{\text{GAM}}$  меньше порогового значения, то алгоритм расчета расстояния перицентра возвращает отрицательный код ответа, а значение функции  $f(\theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2)$  не определено. Экспериментально было установлено, что пороговое значение целесообразно выбрать равным 100 м/с. Результаты расчётов изолиний могут быть использованы для определения окон стартов на гало-орбиту с использованием гравитационного манёвра у Луны. Перелёт с гравитационным манёвром у Луны возможен раз в месяц. Длительность окна стартов определяется расстоянием, на которое КА удаляется от точки  $L_2$  в плоскости эклиптики. Примеры расчёта окон старта на 2014 г представлены в таб. 2. Эта таблица содержит месяц, в котором должен быть совершен перелёт, значение параметра  $\theta_A$ , дату старта и длительность окна стартов в часах. Для некоторых месяцев приведены несколько вариантов перелёта, соответствующих значениям  $\theta_A$ . Например, в январе 2014 г возможен перелёт на гало-орбиты со значениями параметра  $\theta_A$ , равными 0.14 и 0.15. При этом продолжительность окна стартов для  $\theta_A = 0.14$  составляет 36 часов, а для  $\theta_A = 0.15$  – 72 часа. В мае 2014 г возможен перелёт на гало-орбиты с меньшим значением параметра  $\theta_A$ , а именно 0.12, но с длительность окна стартов составляет 20 часов.

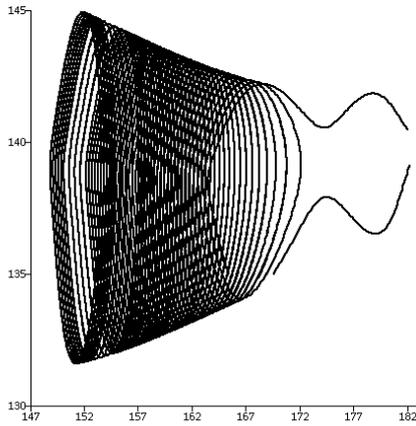


Рис. 7. Изолинии для траекторий перелёта на 28 января 2014 г,  
 $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$

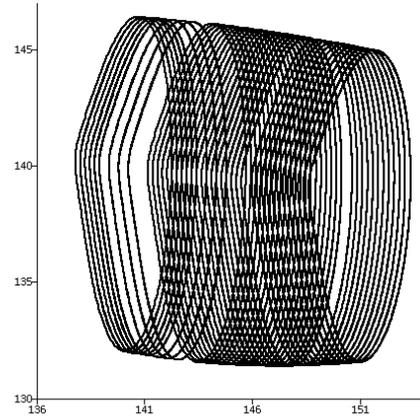


Рис.8. Изолинии для траекторий перелёта на 29 января 2014 г,  
 $\theta_A = 0.14, \theta_B = 0.1$

Таблица 2. Даты перелёта в окрестность  $L_2$  для 2014 г с использованием гравитационного манёвра у Луны.

месяц	$\theta_A$	дата старта	продолжительность окна стартов, часы
январь	0.14	2014/01/28	36
	0.15	2014/01/28	72
февраль	0.14	2014/02/27	40
	0.15	2014/02/26	48
март	0.12	2014/03/29	46
апрель	0.12	2014/04/27	24
май	0.12	2014/05/29	20
	0.13	2014/05/29	28
	0.14	2014/05/29	36
	0.15	2014/05/29	52
июнь	0.12	2014/06/25	22
	0.13	2014/06/25	33.5
	0.14	2014/06/25	40.5
	0.15	2014/06/25	60
июль	0.15	2014/07/25	41
август	0.14	2014/08/24	14.5
	0.15	2014/08/23	57.5
сентябрь	0.12	2014/09/22	12.5
октябрь	0.12	2014/10/23	6
ноябрь	0.12	2014/11/21	23.5
декабрь	0.12	2014/12/18	22

### 3. Расчёт параметров траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки $L_2$ .

Исходными данными для алгоритма расчета параметров траекторий перелёта на гало-орбиту являются её параметры:  $\theta, \theta_A, \theta_B, \varphi_1, \varphi_2$ , момент времени входа в окрестность точки  $L_2$  и высота перицентра  $h_{\text{tg}}$ . Значения фаз  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  определяются на этапе расчёта начальных приближений. Следует отметить, что при расчёте начальных приближений целесообразно сохранять наклонение и аргумент перицентра перелётной орбиты. Это позволит выбирать такие начальные приближения, для которых наклонение в максимальной степени близко к заданному значению, а перицентр располагается в южном полушарии. Под моментом времени входа в окрестность точки  $L_2$  понимается момент времени, когда траектория пересекает плоскость  $x_1 = x_1^*$ .

При расчёте траектории перелёта с низкой околокруговой орбиты на гало-орбиту используется модель движения КА, в которой учитываются гравитационное воздействие Земли, Солнца, Луны и планет Солнечной системы, неравномерность вращения Земли, силы давления солнечной радиации, влияние атмосферы Земли. Для учёта нецентральности гравитационного поля Земли применяется модель гравитационного потенциала Земли ПЗ90-2 размерности 36x36. При расчёте перелётов с использованием гравитационных манёвров применяется модель гравитационного поля Луны JGL075D1 размерности 75x75. Учёт неравномерности вращения Земли обеспечивается моделью IAU2000A, рекомендованной Международным астрономическим союзом. На участке отлёта от Земли используется модель верхней атмосферы Земли ГОСТ Р 25645.166-2004.

Для определения положения Солнца и планет Солнечной системы используется астрономический ежегодник DE421, разработанный в JPL NASA. В качестве основной рабочей системы координат выбрана инерциальная геоцентрическая прямоугольная система координат (СК) J2000, также используются селенографическая прямоугольная вращающаяся СК и геоцентрическая прямоугольная гринвичская СК ПЗ90-2. Моделирование работы двигателей КА не производится, задача решается в импульсной постановке. Метод интегрирования, используемый для численного прогноза – метод Дормана-Принса. Наклонение орбиты выведения полагается равным  $51.6^\circ$  относительно плоскости Земного экватора (что соответствует широте космодрома Байконур).

В прямоугольной инерциальной СК J2000 уравнения движения КА записываются в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mu_3 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \\ + M_{\text{ПЗ90-2}}^{\text{J2000}} \left[ \mathbf{f}_{\text{Земля}}^{\text{грав}} + \mathbf{f}_{\text{атм}} \right] + M_{\text{Селенограф}}^{\text{J2000}} \left[ \mathbf{f}_{\text{Луна}}^{\text{грав}} \right] + \\ + \mathbf{f}_{\text{Солнце}} + \mathbf{f}_{\text{Луна}} + \mathbf{f}_{\text{рад}} + \mathbf{f}_{\text{планет}}, \end{array} \right.$$

где

- $\mathbf{r}$  – вектор положения КА в СК J2000,
- $\mathbf{v}$  – вектор скорости КА в СК J2000,
- $\mu_3$  – гравитационная постоянная Земли,
- $M_{\text{ПЗ90-2}}^{\text{J2000}}$  – матрица перехода из гринвичской вращающейся СК ПЗ90-2 Земли в СК J2000,
- $M_{\text{Селенограф}}^{\text{J2000}}$  – матрица перехода из селенографической СК Луны в СК J2000,
- $\mathbf{f}_{\text{Земля}}^{\text{грав}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных нецентральностью гравитационного поля Земли в гринвичской СК,
- $\mathbf{f}_{\text{Луна}}^{\text{грав}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных нецентральностью гравитационного поля Луны в селенографической СК,
- $\mathbf{f}_{\text{атм}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием атмосферы Земли,
- $\mathbf{f}_{\text{Солнце}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием гравитационного поля Солнца в СК J2000,
- $\mathbf{f}_{\text{Луна}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием гравитационного поля Луны в СК J2000,
- $\mathbf{f}_{\text{рад}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием солнечной радиации,
- $\mathbf{f}_{\text{планет}}$  – вектор возмущающих ускорений, вызванных влиянием гравитационного поля планет Солнечной системы.

Алгоритм расчета параметров траекторий перелёта на гало-орбиту состоит из следующих этапов.

3.1. Расчёт по начальному приближению вектора состояния на момент входа в окрестность  $L_2$ . Для этого по входным параметрам  $\theta, \theta_A, \theta_B$  определяются значения параметров по формулам:  $x_1^* = \theta r_L$ ,  $A = \theta_A r_L$ ,  $B = \theta_B r_L$ , где  $r_L$  – расстояния от точки  $L_2$  до Земли. Расчёт по формулам (3) и (4) вектора состояния КА  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$  во вращающейся системе координат,

фиксированной на момент времени входа в окрестность точки  $L_2$ . Расчёт матрицы  $C_{\text{rot}}^{\text{j2000}}$  перехода из вращающейся системы координат в систему координат J2000 выполняется по формуле:

$$C_{\text{rot}}^{\text{j2000}} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_E & \sin \vartheta_E & 0 \\ -\sin \vartheta_E & -\cos \vartheta_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_x = \cos \omega_E \cos \Omega_E - \sin \omega_E \sin \Omega_E \cos i_E,$$

$$P_y = \cos \omega_E \sin \Omega_E + \sin \omega_E \cos \Omega_E \cos i_E,$$

$$P_z = \sin \omega_E \sin i_E,$$

$$Q_x = -\sin \omega_E \cos \Omega_E - \cos \omega_E \sin \Omega_E \cos i_E,$$

$$Q_y = -\sin \omega_E \sin \Omega_E + \cos \omega_E \cos \Omega_E \cos i_E,$$

$$Q_z = \cos \omega_E \sin i_E,$$

$$R_x = \sin i_E \sin \Omega_E,$$

$$R_y = -\sin i_E \cos \Omega_E,$$

$$R_z = \cos i_E,$$

где  $\vartheta_E, i_E, \Omega_E, \omega_E$  – оскулирующие истинная аномалия, наклонение, долгота восходящего узла, аргумент перицентра орбиты Земли на момент достижения КА точки входа в окрестность  $L_2$ . Расчёт вектора состояния КА  $\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3}, \dot{x}_{j1}, \dot{x}_{j2}, \dot{x}_{j3})^T$  в системе координат J2000 на момент времени входа в окрестность точки  $L_2$  с использованием матрицы  $C_{\text{rot}}^{\text{j2000}}$ .

3.2. Определение момента достижения перицентра  $t_\pi$  отлётной траектории и вектора состояния КА  $\mathbf{x}_\pi = (x_{\pi1}, x_{\pi2}, x_{\pi3}, \dot{x}_{\pi1}, \dot{x}_{\pi2}, \dot{x}_{\pi3})^T$  на этот момент. Для этого численно интегрируют уравнения движения назад до момента времени, когда оскулирующая истинная аномалия станет равной нулю.

3.3. Коррекция вектора состояния так, чтобы высота перицентра была заданной.

Вычисление полуоси орбиты  $a$ , текущего расстояния перицентра  $r_\pi$  и скорости  $v_\pi$  в перицентре по вектору состояния  $\mathbf{x}_\pi$ .

Вычисление значения полуоси, соответствующей заданной высоте перицентра:  $a_1 = a + \frac{1}{2}(h_{\text{trg}} - (r_\pi - R_3))$ , где  $h_{\text{trg}}$  – заданная высота перицентра,  $R_3$  – экваториальный радиус Земли.

Вычисление скорости в перицентре после коррекции высоты перицентра:

$$v_1 = \sqrt{\mu_3 \left( \frac{2}{h_{\text{trg}} + R_3} - \frac{1}{a_1} \right)}.$$

Пропорциональная коррекция компонент вектора  $\mathbf{x}_\pi$  так, чтобы расстояние было равно  $h_{\text{trg}} + R_3$ , а скорость  $v_1$ .

Переход к следующему этапу алгоритма.

3.4. Уточнение вектора скорости  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  так, чтобы параметр  $C$  гало-орбиты был обнулён. Начальные значения компонент вектора скорости полагаются равными значениям, полученным на этапе 3.3. Выполняется итерационный процесс минимизации функции  $C^2$ . Минимизация выполняется градиентным методом. Вычисляются производные:  $\frac{\partial C^2}{\partial v_x}, \frac{\partial C^2}{\partial v_y}, \frac{\partial C^2}{\partial v_z}$ . При этом

на каждом шаге  $i$  итерационного процесса проверяется выполнение условия  $C_i^2 < C_{i-1}^2$ , где  $C_i^2, C_{i-1}^2$  – значения, полученные на текущем и предыдущем шагах. Если это условие не выполняется, компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза. Если значение  $C^2$  попало в заданную окрестность нуля или модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины, происходит переход к следующему этапу алгоритма.

3.5. Уточнение вектора скорости  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  так, чтобы значение параметра  $B$  было равно заданной величине  $\theta_B r_L$ , а параметр  $C$  обнулён. Для этого градиентным методом минимизируется функция  $(B - \theta_B r_L)^2 + C^2$ . На каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия  $(B_i - \theta_B r_L)^2 + C_i^2 < (B_{i-1} - \theta_B r_L)^2 + C_{i-1}^2$ . Если это условие не выполняется, компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза. Если модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины, происходит изменение метода поиска минимума на покоординатный спуск. Если текущему значению вектора скорости соответствует локальный минимум, происходит переход к следующему этапу.

3.6. Уточнение вектора скорости из условия максимального пребывания в окрестности точки  $L_2$ . Вектор скорости уточняется из условия максимума функции  $F_{\Delta t}(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z) = t_{\text{out}L_2} - t_{\text{in}L_2}$  – длительности пребывания КА в сфере с центром в точке  $L_2$  и радиусом  $r_L \sqrt{(k_2 \theta_A)^2 + \theta_B^2}$ . Здесь  $t_{\text{in}L_2}$  – момент входа КА в окрестность точки  $L_2$ , а  $t_{\text{out}L_2}$  – момент выхода из этой окрестности.

Максимум ищется градиентным методом с регулируемым шагом. Поправки к вектору скорости вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x^{(i)} \\ \Delta V_y^{(i)} \\ \Delta V_z^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_z}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_x} \\ \frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_y} \\ \frac{\partial F_{\Delta t}}{\partial V_z} \end{pmatrix},$$

где  $\Delta V_{\max}$  – максимально допустимое значение поправки.

На каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия  $(F_{\Delta t})_i > (F_{\Delta t})_{i+1}$ . Компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза ( $k$  увеличивается на 1), если условие не выполняется. Переключение метода поиска максимума на покоординатный спуск происходит в случае, если модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины. Итерационный процесс завершается при достижении локального максимума.

Следует отметить, что альтернативным вариантом уточнения вектора скорости является его определение из условия минимизации функции:

$$F_C(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \left( (B(t) - \theta_B r_L)^2 + C(t)^2 \right) dt,$$

где  $T$  – интервал осреднения, а значения функций  $B(t)$  и  $C(t)$  находятся из решения системы (1) относительно этих параметров.

На каждом шаге итерационного процесса контролируется выполнение условия  $(\Delta t_{L_2})_i > (\Delta t_{L_2})_{i+1}$ . Компоненты поправок к вектору скорости сокращаются в два раза, если условие не выполняется. Переключение метода поиска максимума на покоординатный спуск происходит в случае, если модуль вектора поправок к вектору скорости стал меньше заданной величины. Итерационный процесс завершается при достижении локального минимума.

В случае использования гравитационного маневра у Луны в вышеописанном алгоритме интегрирование происходит так же до момента достижения перицентра геоцентрической отлетной орбиты, оптимизация гравитационного маневра выполнена на стадии расчета начального приближения – см. раздел 2.

#### 4. Примеры расчёта номинальной траектории перелёта КА «Спектр-РГ» с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту вокруг точки $L_2$ без использования гравитационного манёвра у Луны.

Ниже приведены примеры гало-орбит, полученных вышеописанным методом, использование которых в качестве рабочих возможно для проекта «Спектр-РГ». Также были найдены варианты перелетов для окон стартов, приходящихся на 15 числа месяцев с сентября по декабрь 2014 года. Баллистический коэффициент КА здесь и далее принят равным  $0.03 \text{ м}^3/(\text{с}^2\text{кг})$ , коэффициент давления солнечной радиации –  $5 \cdot 10^{-6}$  (безразмерный) в таблицах начальных условий эти параметры не приводятся.

Таблица 3. Параметры орбиты выведения (раздел 4, Спектр-РГ).

Дата и время конца активного участка, ДМВ	2014/12/30 17:13:15.675
Полуось, тыс. км	6.593857
Эксцентриситет	0.002908
Наклонение, град.	51.611
Период, мин.	88.811470
Высота перицентра, тыс. км	0.196545
Высота апоцентра, тыс. км	0.234897
Долгота восходящего узла, град	319.516
Аргумент перицентра, град	65.821

Таблица 4. Параметры орбиты перелета.

Дата и время перехода на траекторию перелета, ДМВ	2014/12/30 18:17:30.000
Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3.195
Полуось, тыс. км	715.496123
Эксцентриситет	0.990788
Наклонение, град.	51.392
Период, сут.	69.712100
Высота перицентра, тыс. км	0.212908
Высота апоцентра, тыс. км	1418.023065
Долгота восходящего узла, град	319.604
Аргумент перицентра, град	343.572

Таблица 5. Начальные условия орбиты перелета, время в ДМВ.

Дата и время	2014/12/30 18:17:30.000
X	3.992607214
Y	-5.013255978

Z	-1.540951641
VX	6.676870
VY	2.918931
VZ	8.202774

Начальные условия содержат время привязки ДМВ, кинематический вектор состояния в инерциальной СК J2000 с началом в центре масс Земли, компоненты вектора положения в тыс. км, компоненты вектора скорости в км/с. Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 4,000 м/с за период 7 лет. Здесь и далее расчет импульсов коррекций проводился в предположении идеальной навигации и идеального исполнения маневров.

Таблица 6. Импульсы коррекций для удержания КА на гало-орбите.

Дата и время	Модуль импульса, м/с	Длительность пребывания в окрестности $L_2$ , сутки.
2015/03/10 18:17:30.000	1.382	320.815
2015/05/19 18:17:30.000	0.000	250.815
2015/07/28 18:17:30.000	0.986	309.196
2015/10/06 18:17:30.000	0.106	286.005
2015/12/15 18:17:30.000	0.250	244.981
2016/02/23 18:17:30.000	0.940	343.854
2016/05/03 18:17:30.000	0.000	273.854
2016/07/12 18:17:30.000	0.443	321.295
2016/09/20 18:17:30.000	0.125	301.526
2016/11/29 18:17:30.000	0.125	260.769
2017/02/07 18:17:30.000	0.585	265.156
2017/04/18 18:17:30.000	0.928	273.353
2017/06/27 18:17:30.000	0.484	264.983
2017/09/05 18:17:30.000	0.315	317.444
2017/11/14 18:17:30.000	0.062	282.751
2018/01/23 18:17:30.000	0.269	329.353
2018/04/03 18:17:30.000	0.062	350.850
2018/06/12 18:17:30.000	0.000	280.850
2018/08/21 18:17:30.000	0.515	348.898
2018/10/30 18:17:30.000	0.016	353.104
2019/01/08 18:17:30.000	0.016	313.182
2019/03/19 18:17:30.000	0.179	384.971
2019/05/28 18:17:30.000	0.000	314.971
2019/08/06 18:17:30.000	0.096	333.644
2019/10/15 18:17:30.000	0.062	276.463

2019/12/24 18:17:30.000	0.500	223.935
2020/03/03 18:17:30.000	1.753	266.554
2020/05/12 18:17:30.000	1.225	238.642
2020/07/21 18:17:30.000	1.363	331.460
2020/09/29 18:17:30.000	0.031	347.136
2020/12/08 18:17:30.000	0.016	330.799
2021/02/16 18:17:30.000	0.094	329.177
2021/04/27 18:17:30.000	0.000	259.177
2021/07/06 18:17:30.000	0.500	270.840
2021/09/14 18:17:30.000	0.498	321.713
2021/11/23 18:17:30.000	0.000	251.713
2022/02/01 18:17:30.000	0.635	256.474
2022/04/12 18:17:30.000	0.500	297.291
2022/06/21 18:17:30.000	0.000	227.291

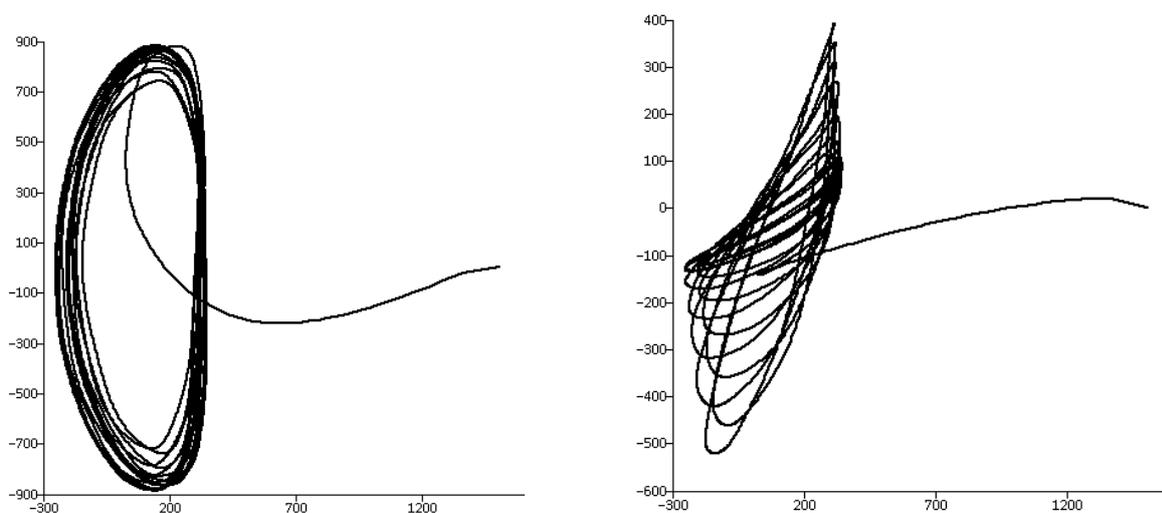


Рис. 9. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскости XY и XZ вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность – тыс. км.

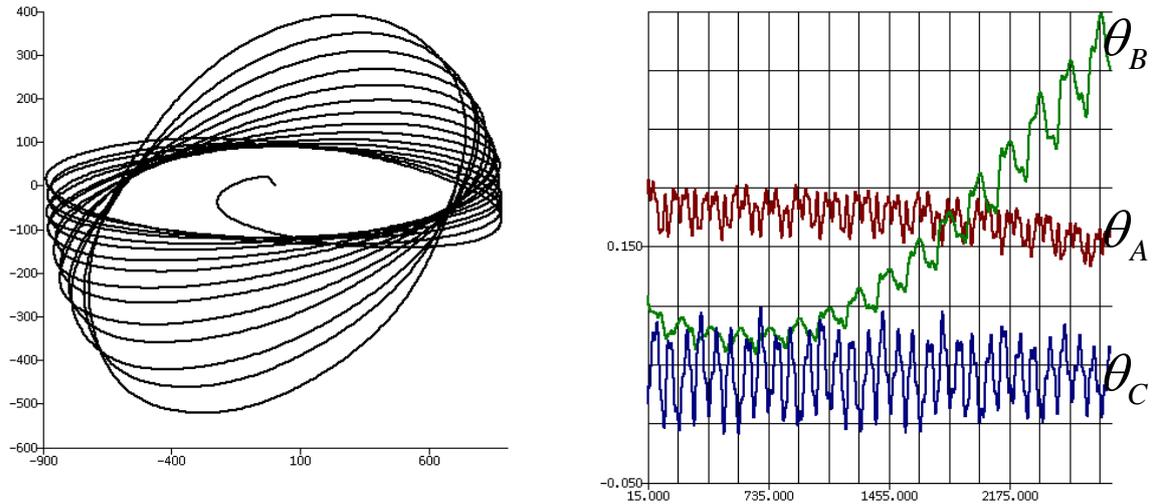


Рис. 10. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскость YZ вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность - тыс. км (слева). Эволюция параметров орбиты  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$  представленной гало-орбиты (справа).

Приведем еще несколько примеров траекторий перелета, рассчитанных для различных окон старта на период с сентября по декабрь 2014 года.

Таблица 7. Параметры орбиты перелета для окна старта 30.09.2014.

Дата и время перехода на траекторию перелета, ДМВ	2014/09/30 04:22:30.000
Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3.265
Полуось, тыс. км	686.911532
Эксцентриситет	0.990397
Наклонение, град.	47.633
Период, сут.	65.576533
Высота перицентра, тыс. км	0.218384
Высота апоцентра, тыс. км	1360.848407
Долгота восходящего узла, град	28.837
Аргумент перицентра, град	192.803

Таблица 8. Начальные условия орбиты перелета, время в ДМВ.

Дата и время	2014/09/30 04:22:30.000
X	-5.160278166
Y	-3.964947978
Z	-1.079258786
VX	5.604056
VY	-5.141350
VZ	-7.901425

Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 9,000 м/с за период 7 лет.

Таблица 9. Параметры орбиты перелета для окна старта 30.10.2014.

Дата и время перехода на траекторию перелета, ДМВ	2014/10/30 18:07:30.000
Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3.194
Полуось, тыс. км	682.239417
Эксцентриситет	0.990336
Наклонение, град.	51.425
Период, сут.	64.908631
Высота перицентра, тыс. км	0.214839
Высота апоцентра, тыс. км	1351.507722
Долгота восходящего узла, град	257.182
Аргумент перицентра, град	338.161

Таблица 10. Начальные условия орбиты перелета, время в ДМВ.

Дата и время	2014/10/30 18:07:30.000
X	-2.847839567
Y	-5.629111712
Z	-1.915786537
VX	5.286359
VY	-5.386036
VZ	7.960998

Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 10,000 м/с за период 7 лет.

Таблица 11. Параметры орбиты перелета для окна старта 30.10.2014.

Дата и время перехода на траекторию перелета, ДМВ	2014/11/30 19:02:00.000
Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3.197
Полуось, тыс. км	667.594546
Эксцентриситет	0.990117
Наклонение, град.	51.384
Период, сут.	62.829906
Высота перицентра, тыс. км	0.219394
Высота апоцентра, тыс. км	1322.213425
Долгота восходящего узла, град	302.490
Аргумент перицентра, град	323.134

Таблица 12. Начальные условия орбиты перелета, время в ДМВ.

Дата и время	2014/11/30 19:02:00.000
X	0.748403713
Y	-5.778060128
Z	-3.095371897
VX	8.152116
VY	-2.611154
VZ	6.852812

Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 10,000 м/с за период 7 лет.

## 5. Примеры расчёта траекторий перелёта КА «Миллиметрон» с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки $L_2$

Ниже приведена гало-орбита, полученной вышеописанным методом, которая на момент выхода препринта принята АКЦ в качестве номинальной для проекта «Миллиметрон».

Таблица 13. Параметры орбиты выведения (раздел 5, Миллиметрон).

Дата и время конца активного участка, ДМВ	2018/09/15 16:08:31.749
Полуось, тыс. км	6.587983
Эксцентриситет	0.002851
Наклонение, град.	51.609
Период, мин.	88.692813
Высота перицентра, тыс. км	0.191067
Высота апоцентра, тыс. км	0.228626
Долгота восходящего узла, град	198.683
Аргумент перицентра, град	84.178

Таблица 14. Параметры орбиты перелета.

Дата и время перехода на траекторию перелета, ДМВ	2018/09/15 17:05:00.000
Импульс перехода на траекторию перелета, км/с	3.202
Полуось, тыс. км	712.251380
Эксцентриситет	0.990733
Наклонение, град.	51.472
Период, сут.	69.238427
Высота перицентра, тыс. км	0.222093
Высота апоцентра, тыс. км	1411.524394
Долгота восходящего узла, град	198.883
Аргумент перицентра, град	312.243

Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 14 м/с за период 7 лет.

Таблица 15. Начальные условия орбиты перелета, время в ДМВ.

Дата и время	2018/09/15 17:05:00.000
X	-5.119120543
Y	1.515577645
Z	-3.881626760
VX	-6.267933
VY	-6.950327
VZ	5.711508

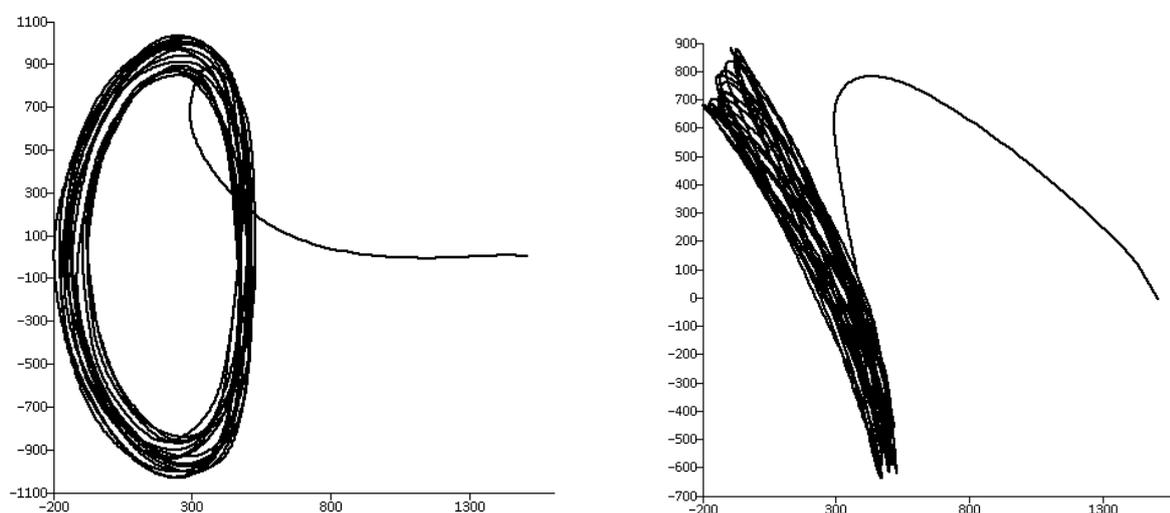


Рис. 11. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскости XY и XZ вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность – тыс. км.

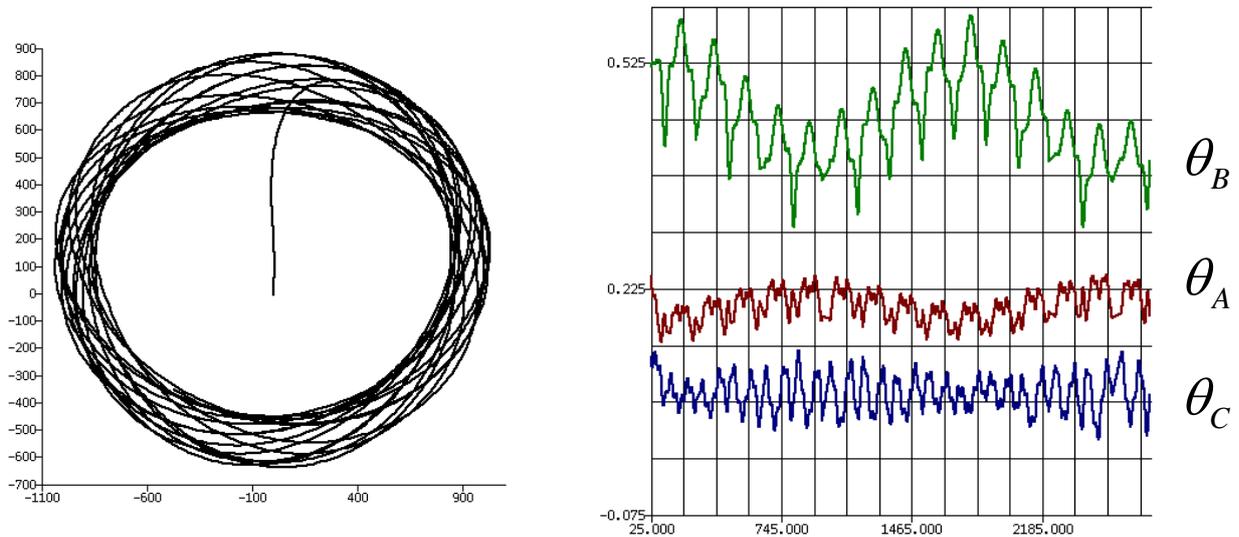


Рис. 12. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскость  $YZ$  вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность - тыс. км (слева). Эволюция параметров орбиты  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$  представленной гало-орбиты (справа).

## 6. Примеры расчёта номинальных траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки $L_2$ с использованием гравитационного манёвра у Луны.

Ниже приведен пример расчёта номинальной траектории перелёта с низкой околоземной орбиты на заданную гало-орбиту вокруг точки  $L_2$  с использованием гравитационного манёвра у Луны для перелёта без предварительного витка.

Таблица 16. Исходные данные.

$\theta$	$\theta_A$	$\theta_B$	ДМВ достижения $L_2$	Наклонение
0.70833	0.12000	0.10000	2014/12/19 04:30:00.000	51.410

Таблица 17. Параметры орбиты перелёта.

Дата и время прохождения перицентра, ДМВ	2014/12/02 10:33:29.186
Полуось, м	257873836.1
Эксцентриситет	0.973362
Наклонение	51.424463
Период, сут.	15.083710
Высота перицентра, м	491000.0
Высота апоцентра, м	502500399.6
Долгота восходящего узла, град	246.047

Аргумент перицентра, град	347.895
Импульс перехода на орбиту перелёта с круговой орбиты, м/с	3083.329

Таблица 18. Начальные условия орбиты перелёта в СК J2000, время в ДМВ.

Дата и время	2014/12/02 10:33:29.186
X, м	-3547748.886
Y, м	-5773189.703
Z, м	-1126406.678
VX, м/с	5051.111573
VY, м/с	-4699.712277
VZ, м/с	8179.775795

Таблица 19. Элементы орбиты КА в селеноцентрической СК

Время прохождения периселения, ДМВ	2014/12/05 05:29:17.971
Полуось, м	3551686.5
Эксцентриситет	4.078134
Наклонение	32.866578
Расстояние перицентра, м	10932566.5

Таблица 20. Параметры гало-орбиты.

Дата и время входа в окрестность $L_2$ , ДМВ	2014/12/14 04:33:19.618
Параметр А, м	180183389.6
theta А	0.120000
Параметр В, м	149996383.9
theta В	0.099896
Параметр С, м	-6.0
theta С	0.000000
Время пребывания в окрестности радиуса 620759841.0 м.	162.72 сут

Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 30,840 м/с за период 7 лет.

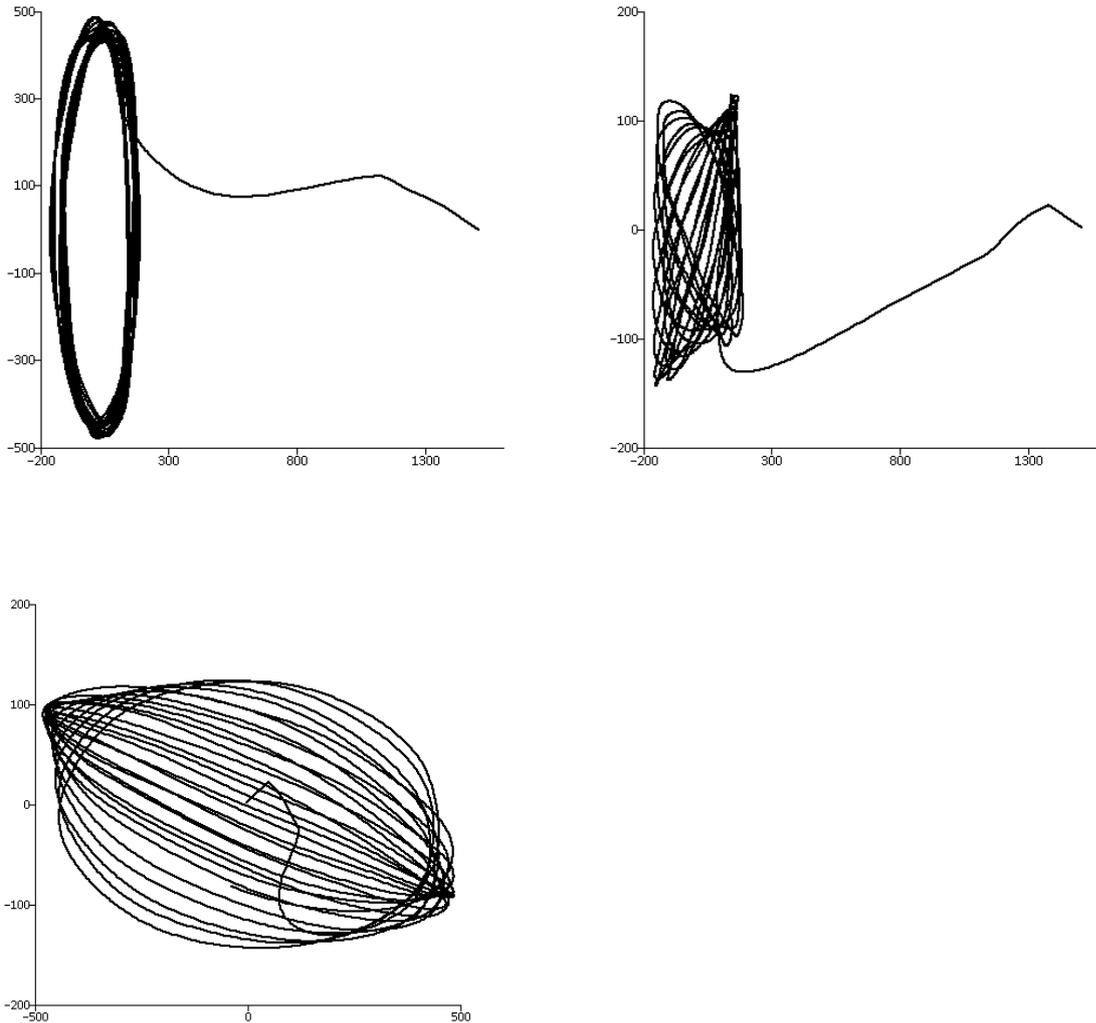


Рис. 13. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскости XY, XZ и YZ вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность – тыс. км.

## Заключение

Результатом данной работы является построение универсального алгоритма, позволяющего находить гало-орбиты в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля с заданными геометрическими характеристиками и выполнять расчёт траекторий перелета на гало-орбиту с низкой околоземной орбиты. Предложенный алгоритм позволяет проектировать гало-орбиты и перелёты на них для КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон». В проекте «Спектр-РГ» необходимо чтобы проекция гало-орбиты на плоскость, ортогональную эклиптики, находилась в кольце, нижняя граница которого определена возможностью попадания в тень Земли, а верхняя - потерей радиовидимости с территории России. Из требований научного эксперимента проекта

«Миллиметронтрон» следует, что гало-орбита должна удаляться от плоскости эклиптики более чем на 800 тыс. км. Предложенный алгоритм позволяет находить гало-орбиты и одноимпульсные перелёты на них и в случае, если требуется, чтобы КА находился в близкой окрестности точки  $L_2$ . В случае если требуется, чтобы гало-орбита в проекции на плоскость эклиптики не удалялась от точки  $L_2$  более чем на 600 тыс. км необходимо использовать гравитационный манёвр у Луны.

### Литература

1. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, № 65.  
URL: [http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_65.pdf](http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_65.pdf)
2. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразие ограниченных орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, № 66. URL: [http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_66.pdf](http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_66.pdf)
3. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Траектории полета Земля – Луна – гало-орбита в окрестности точки  $L_2$  системы Земля – Солнце // Космические исследования – 1992. – т. 30. № 4. – С.435–454.
4. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
5. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки  $L_2$  системы Земля – Солнце и смежные задачи // Космич. исслед. 1987. Т. XXV. № 2. С. 163–185.
6. Eismont N., Dunham D., Jen S.-C., Farquhar R. Lunar Swingby as a Tool for Halo-Orbit Optimization in Relict-2 Project // Proceeding of the ESA Symposium on Spacecraft Flight Dynamic, Germany, 30-4 October, 1991 (ESA SP-326, December 1991), pp.435-439.
7. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Характеристики управления при выведении КА в окрестность точки  $L_2$  системы Солнце – Земля с использованием гравитации Луны (Проект «Реликт-2») // Космич. исслед. 1993, т. 31, № 5. с.3–20.
8. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М: Наука, 1978. – 456 с.
9. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трёх тел. – М: Наука, 1982. – 656 с.
10. Крейсман Б.Б. Устойчивые пространственные орбиты «вокруг» коллинеарных точек либрации. // Космические исследования – 2011. – т. 48. № 3. – С. 271-278.
11. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985.